

# 論文要旨

氏名 佐々木 和哉 ㊞

## 論文題目

Equilibrium problems and convex functions on geodesic spaces with curvature bounded above

## 論文要旨

凸解析学において、均衡問題は主要な研究トピックの一つである。均衡問題は、凸最小化問題や零点問題をはじめとする凸解析学における重要な問題を含むことから、凸解析学における重要な問題である。本論文では、曲率が上に有界な測地距離空間である完備  $CAT(\kappa)$ 空間において、均衡問題のリゾルベント作用素が一価写像となるための摂動の十分条件を与えた。また、適切に定義されたリゾルベント作用素について、その不動点集合が均衡問題の解全体の集合と一致することを示し、それにより均衡問題の解への収束定理および解の存在定理を示した。

均衡問題に関連して、値域に正の無限大を含む凸最小化問題についても、凸関数のリゾルベント作用素が重要な働きをすることが知られている。本論文では、凸関数のリゾルベントが一価写像となるための摂動の十分条件を与えた。また、そのリゾルベントの不動点集合が凸関数の最小点全体の集合と一致することを利用し、最小点への収束定理および最小点の存在定理を示した。

均衡問題のリゾルベント、凸関数のリゾルベント、および距離射影は、ある共通した性質をもつことが確認される。そこで本論文において、その性質をもつ一般の写像についても検討を行い、Mann 型および Halpern 型の不動点定理を示した。

$CAT(\kappa)$ 空間における上記の一連の定理の証明においては、曲率  $\kappa$  に依存した凸結合の概念が大きな役割を果たす。これを本論文では  $\kappa$  凸結合と呼んでいるが、これが  $CAT(\kappa)$ 空間において良い振る舞いをする根拠として、定曲率  $\kappa$  をもつモデル空間との高い親和性が挙げられる。本論文では、一般の測地距離空間における  $\kappa$  凸結合、および定曲率  $\kappa$  をもつモデル空間における  $\kappa$  凸結合について考察した。特に、モデル空間において、 $\kappa$  凸結合が通常の凸結合よりも良い振る舞いをするを示す幾何的な結果を得た。さらに、 $\kappa$  凸結合を用いた新たな種類の凸関数について考察を行い、それが通常の凸関数よりも強い性質を導くことを得た。

論文審査の要旨及び審査結果の要旨

|   |  |          |
|---|--|----------|
| 2021年入学   | 研究分野 非線形解析学  | 氏名 佐々木和哉 |
| 審査委員  | (主査) 高田英行 教授<br>(副査) 並木誠 教授<br>(副査) 豊田昌史 教授<br>(副査) 木村大輔 准教授<br>(副査) 木村泰紀 教授 |          |
| (論文題目)<br>Equilibrium problems and convex functions on geodesic spaces with curvature bounded above   |  |          |
| (論文審査の要旨及び審査結果の要旨)<br>非線形問題の一つである均衡問題は、凸解析学における各種の問題を含んでおり、非線形解析学の中心的話題の一つである。本論文では測地距離空間上で定義された均衡問題を中心に、それに関連する問題をさまざまな視点から検討し、有用な新概念の導入、新たな概念の性質に関する考察、均衡問題の解近似法の提案等を行うことで、この問題の重要性をさらに深める知見が得られた。詳細を以下に述べる。<br>本論文で取り扱う均衡問題は、凸解析学の手法を用いた解析が行われている。凸解析学において最も基本的な凸結合の概念は、従来の研究の土台であった線形空間だけでなく測地距離空間においても定義可能であることから、凸解析学は測地距離空間上でも盛んに研究されるようになった。本論文の第一の結果として、測地距離空間における凸結合の概念を、空間の曲率上限に依存したものへの拡張概念として導入したことが挙げられる。 $\kappa$ 凸結合と呼ばれるこの概念により、均衡問題を含む凸解析の諸概念が見通しよく定義され、その性質も効率よく整理されることが判明した。また、従来は個別の $\kappa$ の値に対する知見のみが主に得られていたのに対し、本論文では $\kappa$ をパラメタとした命題として証明することにより、任意の $\kappa$ に適用可能な定理が得られていることも重要な成果である。この結果の応用として、球面におけるチェバの定理が得られることも大変興味深い。<br>従来のヒルベルト空間やバナッハ空間上で定義された均衡問題の研究と同様に、測地距離空間上の均衡問題についてもリゾルベントと呼ばれる作用素が重要な役割を果たす。この作用素は均衡問題を写像の不動点問題に帰着させるものであり、測地距離空間上の不動点理論とともに多くの研究がなされている。本論文ではリゾルベントの定義で用いられるさまざまな摂動関数を統一して扱 |  |          |

う手法が提案されている。リゾルベント作用素が持つべき条件として、空間全体で定義された一価写像であることと、作用素の不動点集合が均衡問題の解集合と一致することを要請し、曲率上限をパラメタに持つ関数を用いることで、摂動に利用可能な関数の十分条件を与えた。さらに、摂動関数に応じて異なる性質を持ちうるリゾルベント作用素に対し、共通の性質を見出すことで、リゾルベントを用いた解近似点列の生成に関する定理も証明した。この結果は不動点近似定理の形で述べられているが、各種のリゾルベント作用素が適用可能な仮定となっており、不動点近似理論と均衡問題の解近似理論の双方に適用可能な優れた結果であると言える。

本論文の後半には $\kappa$ 凸関数に関する考察がある。この関数は前述の $\kappa$ 凸結合を用いて定義される自然な概念である。しかしながら、その性質には未知の部分が多く、現時点で解明されている性質はあまりない。本論文ではとくにパラメタ $\kappa$ が負の場合についての考察が多く述べられている。理論的な側面に加え、計算機実験を実施することにより、興味深い結果を得ている。均衡問題の理論に関連が深い、 $\kappa$ 凸関数の有界性に関する性質は、本論文では予想として述べるに留まり、理論的な解明はなされていないが、計算機実験が示唆するものも多くあり、本論文の考察が今後の理論解明に役立つことが期待される。

これらの成果は、測地距離空間における均衡問題の研究に対して十分に貢献したものと判断される。したがって論文著者の佐々木和哉は博士（理学）の学位を授与されるに十分な資格があることを全審査委員が一致して確認した。

## 最終審査の結果の要旨

|   |  |          |
|---|--|----------|
| 2021 年入学  | 研究分野 非線形解析学  | 氏名 佐々木和哉 |
| 審査委員  | (主査) 高田英行 教授<br>(副査) 並木誠 教授<br>(副査) 豊田昌史 教授<br>(副査) 木村大輔 准教授<br>(副査) 木村泰紀 教授 |          |
| 成績 合格   |  |          |
| (最終試験結果の要旨)<br><br>2024 年 2 月 19 日, 上記の審査委員 5 名は学位論文提出者 佐々木和哉 に対し, 学位論文の内容及び関連事項に関する学識についての最終審査を実施した. その結果, 審査委員 5 名は全員, 佐々木和哉 が<br><br>情報数理分野, 特に非線形解析学と不動点理論<br><br>に関して博士 (理学) の学位を受けるに十分な学識があるものと認め, 最終審査に合格であると判定することで意見が一致した. |  |          |